Manual del usuario de *Física para ingeniería y ciencias*

Estas páginas ofrecen un breve viaje por las características de *Física para ingeniería y ciencias.*

Cada capítulo del libro de texto comienza con un ejemplo del mundo real de un concepto central. El capítulo 28 inicia con el concepto de circuitos de corriente directa y usa las baterías como ejemplo, al cual se vuelve en diversas condiciones diferentes. La fotografía inicial tiene leyendas y las preguntas de cierre de la leyenda tratan todas de este ejemplo.

CAPÍTULO 28

Circuitos de corriente directa

CONCEPTOS EN CONTEXTO

Conceptos en contexto

Baterías como éstas hacen funcionar herramientas portátiles, electrodomésticos y artículos electrónicos. Con frecuencia se puede representar un aparato conectado con una batería como un resistor.

En este capítulo se examinarán circuitos con una o más baterías, y uno o más resistores. Se podrán resolver preguntas como:

? ¿Cuánta energía puede suministrar una batería común? (Ejemplo 1, página 889)

? ¿Cómo funciona una batería? (Sección 28.2, página 890)

? En un circuito con varias baterías y resistores, ¿cómo se determina la corriente que pasa por cada resistor? (Ejemplo 2, página 894 y ejemplo 5, página 898)

? Para esos circuitos, ¿cuál es la potencia que suministra cada batería? ¿Cuál es la potencia disipada en cada resistor? (Ejemplo 6, página 902 y ejemplo 7, página 904)

La cantidad de secciones en cada capítulo es variable. La mayoría de las secciones tienen una longitud de cuatro o cinco páginas y cubren un tema principal.

En este capítulo se vuelve a las baterías para explorar conceptos sobre la energía que suministran y su uso en las páginas 889, 890, 894, 898, 902 y 906, como se indica.

174 **CAPÍTULO 6** Más aplicaciones de las leyes de Newton

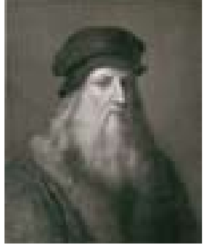
Encontrar una solución de la ecuación del movimiento significa hallar una fuerza **F** y una correspondiente aceleración **a** tales que satisfagan la ecuación de Newton: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Para un físico, el problema típico incluye una fuerza conocida y un movimiento desconocido; por ejemplo, el físico conoce las fuerzas entre los planetas y el Sol y quiere calcular los movimientos de estos cuerpos. Pero para un ingeniero, frecuentemente tiene importancia práctica el problema inverso, con un movimiento conocido y una fuerza desconocida; por ejemplo, el ingeniero sabe que un tren debe tomar una curva a 60 km/h y quiere calcular las fuerzas que deben soportar la vía y las ruedas. Un problema especial con un movimiento conocido es el de la estática; en este caso, se sabe que el cuerpo está en reposo (velocidad cero y aceleración cero) y se quiere calcular las fuerzas que mantendrán la condición de equilibrio. Así, dependiendo de las circunstancias, puede considerarse el miembro derecho o el izquierdo de la ecuación $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ como una incógnita que debe calcularse a partir de lo que se conoce en el otro miembro.

En el capítulo anterior se encontraron algunas soluciones de la ecuación del movimiento con fuerzas sencillas y constantes, como el peso y empujes o tracciones constantes. En este capítulo se examinarán nuevas soluciones de la ecuación del movimiento, y se examinarán otras fuerzas más complicadas, como la fricción y las fuerzas que ejercen los resortes.

En las expresiones matemáticas tales como $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, el tipo en **negrita** indica un **vector** y las *itálicas* indican variables que no son vectores.

6.1 FRICCIÓN

Las fuerzas de fricción, que han sido ignoradas en capítulos anteriores, juegan un papel importante en el ambiente y ofrecen ejemplos muy interesantes de movimiento con fuerza constante. Por ejemplo, si el conductor de un automóvil en movimiento frena de manera repentina con fuerza, las ruedas se traban y comienzan a derrapar en el pavimento. Las ruedas que derrapan experimentan una fricción (aproximadamente) constante que se opone al movimiento y desacelera al automóvil a una tasa (aproximadamente) constante, por ejemplo, de 8 m/s^2. La magnitud de la fuerza de fricción depende de las características de los neumáticos y del pavimento; además, la pesada fricción de las ruedas de caucho sobre un pavimento común se acompaña de una abrasión de las ruedas, lo cual introduce complicaciones adicionales.



LEONARDO da VINCI (1452-1519) *Artista, ingeniero y científico italiano. Famoso por sus brillantes logros en la pintura, la escultura y la arquitectura. Leonardo hizo también contribuciones pioneras a la ciencia. Pero sus investigaciones de la fricción quedaron olvidadas y las leyes de la fricción fueron redescubiertas 200 años más tarde por Guillaume Amontons, físico francés.*

Por simplicidad, se va a enfocar la atención en un caso idealizado de fricción, considerando un bloque sólido de metal que se desliza sobre una superficie plana de metal. La figura 6.1 muestra un bloque de acero, en forma de ladrillo, que se desliza sobre una mesa de acero. Si se le da al bloque una velocidad inicial y luego se le deja moverse por inercia, la fricción lo desacelera. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso **w**, la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **f**. El peso **w** actúa hacia abajo con una magnitud *mg*. La fuerza normal **N** que ejerce la mesa contra el bloque actúa hacia arriba; la magnitud de esta fuerza normal debe ser *mg* de modo que equilibre el peso. La fuerza de fricción **f** que ejerce la mesa sobre el bloque actúa horizontalmente, de manera paralela a la mesa, en sentido opuesto al del movimiento. Esta fuerza, como una fuerza normal, es una fuerza de contacto que actúa sobre toda la superficie inferior del bloque; sin embargo, en la misma fig
la superficie.

La fuerza de fricción proviene de l
átomos del bloque forman enlaces con l
bloque se desliza, estos enlaces se romp
fuerza macroscópica de fricción represe
ces microscópicos. Aunque en el nivel
complicado, en el macroscópico la fuerz
cribirse en forma adecuada mediante un
vez por Leonardo da Vinci:

El texto en *itálicas* indica definiciones principales de leyes o enunciados de principios generales.

El texto en **negritas** señala el primer uso de un término clave y generalmente está acompañado de una explicación.

Los **conceptos clave** o las variantes importantes de estos conceptos tienen una etiqueta de término clave al margen.

6.1 Fricción

La magnitud de la fuerza de fricción entre superficies secas y no lubricadas que se deslizan una sobre otra es proporcional a la magnitud de la fuerza normal que actúa sobre las superficies y es independiente del área de contacto y de la rapidez relativa.

La fricción entre superficies en movimiento relativo se llama **fricción en deslizamiento** o **fricción cinética**. De acuerdo con esta ley, la magnitud de la fuerza de fricción cinética puede escribirse matemáticamente como

fuerza de fricción cinética

$$f_k = \mu_k N \tag{6.1}$$

donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**, una característica constante del material de que se trata. La tabla 6.1 es una lista de coeficientes de fricción para varios materiales comunes.

Observe que la ecuación (6.1) dice que las magnitudes de la fuerza de fricción y de la fuerza normal son proporcionales. Las *direcciones* de estas fuerzas son, sin embargo, bastante diferentes: la fuerza normal **N** es perpendicular a la superficie de contacto, mien
al de
A
ejem
cual
que
fricc
barg
nería en los que las velocidades no son extremas. La ley simple de fricción es una aproximación razonablemente buena para una amplia gama de materiales, y es óptima para metales que se deslizan sobre metales.

Las **ecuaciones resaltadas** son clave y expresan en forma matemática los conceptos centrales de la física.

N
$\mathbf{f}_k$
movimiento
w
La fuerza de fricción actúa sobre la superficie inferior en un sentido opuesto al del movimiento.

FIGURA 6.1 Fuerzas sobre un bloque que se desliza sobre una placa.

El hecho de que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto significa que la fuerza de fricción del bloque que se desliza sobre la mesa es la misma si éste se desliza sobre una cara grande o sobre una de las caras menores (véase la figura 6.2). Lo anterior puede parecer sorprendente al principio: podría esperarse que la fuerza de fricción fuese mayor cuando el bloque se desliza sobre su cara mayor, con más área en contacto con la mesa. Sin embargo, la fuerza normal se distribuye entonces sobre un

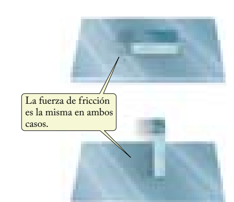


FIGURA 6.2 Bloque de acero sobre una placa de acero, deslizándose sobre una cara grande o sobre una cara pequeña.

TABLA 6.1 COEFICIENTES DE FRICCIÓN CINÉTICA Y ESTÁTICA[a]

MATERIALES	μ_k	μ_s
Acero sobre acero	0.6	0.7
Acero sobre plomo	0.9	0.9
Acero sobre cobre	0.4	0.5
Cobre sobre hierro fundido	0.3	1.1
Cobre sobre vidrio	0.5	0.7
Esquí encerado sobre nieve		
a −10°C	0.2	—
a 0°C	0.05	—
Caucho sobre concreto	≈1	≈1

[a] El coeficiente de fricción depende de la condición de la superficie. Los valores de esta tabla son comunes para superficies secas, pero no son completamente confiables.

Aparecen breves **bosquejos biográficos** en los márgenes de este texto. Cada uno ofrece una breve ojeada a la vida de alguna persona que hizo un aporte importante al conocimiento sobre el mundo físico, en este caso, el artista e ingeniero italiano Leonardo da Vinci.

Los **Ejemplos** son una parte crítica de cada capítulo.

- Los ejemplos proporcionan ilustraciones concretas de los conceptos que se estudian.
- Al desarrollarse el capítulo, los ejemplos avanzan desde sencillos hasta más complicados.

En todo el texto, **las figuras** con frecuencia se desarrollan a partir de otras, con un nuevo estrato de información.

- Los **comentarios en globo** señalan con frecuencia componentes de importancia especial en la figura.

El ícono **Concepto en contexto** indica aquí el ejemplo de inicio de capítulo, neumáticos de automóvil, al que se está volviendo. En este ejemplo, se explora la desaceleración de un automóvil deslizante, con un coeficiente específico de fricción cinética para un neumático de hule.

178 **CAPÍTULO 6** Más aplicaciones de las leyes de Newton

EJEMPLO 3 Un hombre empuja un pesado cajón sobre un piso. Lo hace hacia abajo y hacia adelante, de modo que su empuje forma un ángulo de 30° con la horizontal (véase la figura 6.5*a*). La masa del cajón es de 60 kg y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.50$. ¿Qué fuerza debe ejercer el hombre para mantener el cajón moviéndose a velocidad uniforme?

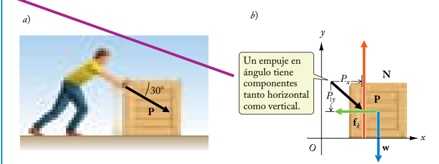


FIGURA 6.5 *a*) Un hombre empuja un cajón. *b*) Diagrama de "cuerpo libre" para el cajón.

SOLUCIÓN: La figura 6.5*b* es un diagrama de "cuerpo libre" para el cajón. Las fuerzas sobre el cajón son el empuje **P** del hombre, el peso **w**, la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción $\mathbf{f}_k$. Observe que como el hombre empuja el cajón hacia abajo contra el piso, la magnitud de la fuerza normal no es igual a *mg*. Tendrá que tratarse la magnitud de la fuerza normal como incógnita. Tomando el eje *x* horizontal y el eje *y* vertical, se observa, por la figura 6.5*b*, que las componentes *x* y *y* de las fuerzas son (véase también la figura 5.37)

$$P_x = P\cos 30° \qquad P_y = -P\,\text{sen}\,30°$$
$$w_x = 0 \qquad w_y = -mg$$
$$N_x = 0 \qquad N_y = N$$
$$f_{k,x} = -\mu_k N \qquad f_{k,y} = 0$$

Como la aceleración del cajón es cero tanto en la dirección *x* como en la *y*, la fuerza neta en cada una de estas direcciones debe ser cero:

$$P\cos 30° + 0 + 0 - \mu_k N = 0$$
$$-P\,\text{sen}\,30° - mg + N + 0 = 0$$

Hay dos ecuaciones para las dos incógnitas *P* y *N*. Multiplicando la segunda ecuación por μ_k y luego sumando la ecuación resultante a la primera, puede eliminarse *N* y encontrar una ecuación para *P*:

$$P\cos 30° - \mu_k P\,\text{sen}\,30° - \mu_k mg = 0$$

Despejando *P* se encuentra

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos 30° - \mu_k \text{sen}\,30°} = \frac{0.50 \times 60\text{ kg} \times 9.81\text{ m/s}^2}{\cos 30° - 0.50 \times \text{sen}\,30°} \tag{6.4}$$
$$= 4.8 \times 10^2\text{ N}$$

Las fuerzas de fricción también actúan entre dos superficies en reposo. Si, por ejemplo, se ejerce una fuerza contra el lado de un bloque de acero que está inicialmente en reposo sobre una mesa de acero, el bloque no se moverá a menos que la fuerza sea suficientemente grande para vencer la fuerza que lo mantiene en su sitio. La fricción entre

176 **CAPÍTULO 6** Más aplicaciones de las leyes de Newton

área mayor, y por tanto es menos efectiva para comprimir los átomos unos contra otros; el resultado neto es que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto.

Conceptos en contexto

Una fuerza de fricción cinética actúa sobre cada rueda, pero el diagrama muestra estas fuerzas combinadas en una sola fuerza $\mathbf{f}_k$.

y N $\mathbf{f}_k$ O x w

La fricción cinética se opone al movimiento de derrape.

FIGURA 6.3 Diagrama de "cuerpo libre" para un automóvil que derrapa con las ruedas trabadas.

EJEMPLO 1 Suponga que el coeficiente de fricción cinética del caucho duro de un neumático de automóvil deslizándose sobre el pavimento de una calle es $\mu_k = 0.8$. ¿Cuál es la desaceleración de un automóvil sobre una calle plana si el conductor frena repentinamente, de modo que todas las ruedas están trabadas y derrapando? [Suponga que el vehículo es un modelo económico que no tiene un sistema de frenado antitrabado (ABS).]

SOLUCIÓN: La figura 6.3 muestra el diagrama de "cuerpo libre" con todas las fuerzas que se ejercen sobre el automóvil. Éstas son el peso **w**, la fuerza normal **N** que ejerce la calle y la fuerza de fricción $\mathbf{f}_k$. La fuerza normal debe equilibrar el peso, por lo cual la magnitud de la fuerza normal es la misma que la magnitud del peso, o $N = w = mg$. De acuerdo con la ecuación (6.1), la magnitud de la fuerza de fricción es entonces

$$f_k = \mu_k N = 0.8 \times mg$$

Como esta fuerza de fricción es la única fuerza horizontal sobre el automóvil, la desaceleración del mismo a lo largo de la calle es

$$a_x = -\frac{f_k}{m} = -\frac{0.8 \times mg}{m} = -0.8 \times g = -0.8 \times 9.8\text{ m/s}^2$$
$$= -8\text{ m/s}^2$$

COMENTARIO: Las fuerzas normales y las fuerzas de fricción actúan sobre los cuatro neumáticos del automóvil; pero en la figura 6.3 (y en otros diagramas de "cuerpo libre" de este capítulo) estas fuerzas se han combinado en una fuerza neta **N** y una fuerza de fricción neta f_k que, por conveniencia, se muestra como si actuara en el centro del automóvil. En la medida en que el movimiento se trata como movimiento puramente de traslación (es decir, movimiento de partícula), no importa en qué punto del automóvil actúen las fuerzas. Posteriormente, en el capítulo 13, se estudiará cómo afectan las fuerzas el movimiento rotacional de los cuerpos y entonces se volverá importante llevar un registro del punto exacto en que cada fuerza actúa.

EJEMPLO 2 Un barco se bota al agua sobre una rampa que forma un ángulo de 5° con la dirección horizontal (véase la figura 6.4). El coeficiente de fricción cinética entre el fondo del barco y la rampa es $\mu_k = 0.08$. ¿Cuál es la aceleración del barco a lo largo de la rampa? ¿Cuál es la rapidez del barco después de acelerar desde el reposo durante una distancia de 120 m hacia abajo de la rampa y hacia el agua?

SOLUCIÓN: La figura 6.4*b* es el diagrama de "cuerpo libre" para el barco. Las fuerzas que se muestran son el peso **w**, la fuerza normal que ejerce la rampa **N** y la fuerza de fricción $\mathbf{f}_k$. La magnitud del peso es $w = mg$.

Como no hay movimiento en la dirección perpendicular a la rampa, se encuentra, como en la ecuación (5.36), que la fuerza normal es

$$N = mg\cos\theta$$

y la magnitud de la fuerza de fricción es

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta \tag{6.2}$$

Las **Soluciones** en los ejemplos pueden cubrir tanto enfoques generales como detalles específicos sobre cómo extraer la información del planteamiento del problema.

Ocasionalmente, un ejemplo se cierra con **Comentarios**, para señalar las limitaciones particulares y las implicaciones más amplias de una solución.

Al final de cada sección de un capítulo aparece una **Revisión**.

- Cada comprobación es un autoexamen para probar el dominio que tiene el lector de los conceptos en la sección precedente.
- Cada comprobación tiene una respuesta.

190 CAPÍTULO 6 Más aplicaciones de las leyes de Newton



Revisión 6.3

PREGUNTA 1: Una piedra se hace girar en círculo en el extremo de un cordón; éste se rompe repentinamente. Describa el movimiento de la piedra después de romperse el cordón. Ignore la gravedad.

PREGUNTA 2: En una intersección, una motocicleta da vuelta a la derecha con rapidez constante. Durante esta vuelta, la motocicleta viaja sobre un arco de círculo de 90°. ¿Cuál es la dirección de la aceleración de la motocicleta durante esta vuelta?

PREGUNTA 3: Un automóvil se mueve con rapidez constante por un camino que pasa sobre una pequeña colina con una cumbre esférica. ¿Cuál es la dirección de la aceleración del automóvil en la cumbre de la colina?

PREGUNTA 4: En el ejemplo 12, para el avión que hace el giro en el rizo, ¿el asiento ejerce una fuerza centrípeta o centrífuga sobre la aviadora? ¿La aviadora ejerce una fuerza centrípeta o centrífuga sobre el asiento? ¿Cuál es la dirección del peso aparente, aumentado, de la aviadora en el instante en que el avión pasa por la parte inferior del rizo? ¿La dirección del peso aparente cambia cuando el avión sube por el rizo?

PREGUNTA 5: Dos automóviles viajan alrededor de una glorieta de tránsito en carriles adyacentes (exterior e interior). Si los dos viajan con rapidez constante, ¿cuál de ellos completa primero el círculo? ¿Cuál tiene la mayor aceleración?

(A) Exterior; exterior (B) Interior; exterior
(C) Exterior; interior (D) Interior; interior

Los recuadros de **Técnicas para resolución de problemas** aparecen en los lugares pertinentes en todo el libro y ofrecen sugerencias sobre cómo tratar problemas de un tipo particular; en este caso, problemas que implican el uso de la fricción o de la fuerza centrípeta.

TÉCNICAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS — FUERZAS DE FRICCIÓN Y FUERZAS CENTRÍPETAS

Los problemas que comprenden aplicaciones de las leyes de Newton en este capítulo pueden resolverse mediante las técnicas que se explicaron en el capítulo anterior. Al tratar con las fuerzas de fricción y con la fuerza centrípeta para movimiento circular uniforme, preste especial atención a las direcciones de las fuerzas.

1. La magnitud de la fuerza de fricción cinética es proporcional a la magnitud de la fuerza normal, pero su dirección no es la de esta última fuerza. En vez de esto, la fuerza de fricción cinética es siempre paralela a las superficies deslizantes y de sentido opuesto al movimiento.
2. La fuerza de fricción estática siempre es paralela a las superficies deslizantes, opuesta a la dirección en que el cuerpo se tiende a mover. Si usted tiene dudas acerca de la dirección de la fuerza de fricción estática, imagine que la fricción está ausente y pregúntese en qué dirección se movería entonces el cuerpo; la fuerza de fricción estática es la dirección opuesta.
3. El movimiento circular uniforme necesita una fuerza hacia el centro de la trayectoria circular, es decir, una fuerza centrípeta. Cuando prepare un diagrama de "cuerpo libre" para un cuerpo en movimiento circular uniforme, incluya todos los empujes y las tracciones que actúan sobre el cuerpo en movimiento, pero *no* incluya una "fuerza centrípeta mv^2/r". Esto sería un error, como incluir una "fuerza ma" en un diagrama de "cuerpo libre" para un cuerpo que tenga alguna clase de movimiento de traslación. La cantidad mv^2/r no es una fuerza; es simplemente el producto de la masa y la aceleración centrípeta. Esta aceleración la causa una fuerza o la resultante de varias fuerzas que ya están incluidas entre los empujes y tracciones que se muestran en el diagrama de "cuerpo libre". Por poner un caso, en el ejemplo 11, la fuerza resultante es $w \tan \theta$; en el ejemplo 12, la resultante es $N - mg$ y estas resultantes son iguales a mv^2/r por la segunda ley de Newton [véase las ecuaciones (6.17) y (6.18)]. A fin de evitar confusión, no incluya la resultante en el diagrama de "cuerpo libre" para un cuerpo en movimiento circular uniforme. En vez de esto, dibuje la resultante en un diagrama separado (véase la figura 6.21*b*).

202 CAPÍTULO 6 Más aplicacion

verticalmente de la parte inferior del resorte más bajo. ¿Cuánto estira la masa el resorte combinado y cuánto estira cada resorte individual?

*86. Un bloque con masa de 1.5 kg se coloca sobre una superficie plana y un resorte con constante de resorte 1.2×10^3 N/m tira del bloque horizontalmente (véase la figura 6.48). El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la mesa es $\mu_s = 0.60$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.40$.

a) ¿Cuánto debe estirarse el resorte para que comience a moverse el bloque?

b) ¿Cuál es la aceleración del bloque si el resorte se mantiene estirado a un valor constante equivalente al que se requiere para iniciar el movimiento?

c) ¿Por qué cantidad debe estirarse el resorte para mantener el movimiento de masa a una velocidad constante?

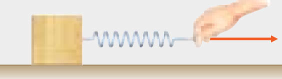


FIGURA 6.48 Masa de la que tira un resorte.

*87. Un bloque con masa de 1.5 kg está colocado sobre un plano inclinado a 30° y un resorte con una constante de resorte 1.2×10^3 N/m tira de él hacia arriba (véase la figura 6.49). La dirección de la tracción del resorte es paralela al plano inclinado. El ... que y el plano incli- ... ón cinética es $\mu_k =$ ... que el bloque co- ... estiramiento del re- ... e igual al del necesario para iniciar el movimiento?

c) ¿Cuánto debe estirarse el resorte para mantener la masa moviéndose con rapidez constante?

Las **Respuestas a las revisiones** aparecen al final de cada capítulo, después de los problemas de repaso.



FIGURA 6.49 Bloque sobre rampa del que tira un resorte.

*88. Una masa m_1 se desliza sobre una mesa lisa, sin fricción. La masa está obligada a girar en círculo por un cordón que pasa por un agujero en el centro de la mesa y está fijado a una segunda masa m_2 que cuelga verticalmente debajo de la mesa (véase la figura 6.50). Si el radio del movimiento circular de la primera masa es r, ¿cuál debe ser su rapidez?

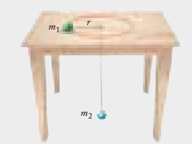


FIGURA 6.50 Masa en movimiento circular y masa colgante.

89. Un automóvil toma una curva de 45 m de radio a 70 km/h. ¿Derrapará el automóvil? La curva no tiene peralte y el coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el camino es de 0.80.

*90. Una piedra de 0.90 kg fijada a una varilla se hace girar en un círculo vertical de 0.92 m de radio. Suponga que durante este movimiento la rapidez de la piedra es constante. Si en la parte superior del círculo la tensión sobre la varilla es (casi) cero, ¿cuál es la tensión en la varilla en la parte inferior del círculo?

Respuestas a las revisiones

Revisión 6.1

1. El peso del segundo libro da por resultado una fuerza normal entre el primer libro y la mesa que es doble, de modo que la fuerza de fricción y, por tanto, el empuje horizontal para vencerla, serán también el doble, o sea 20 N. Si el primer libro empuja al segundo, entonces la fuerza de fricción del segundo libro sobre el primero se suma a la fuerza de fricción del primero, para necesitar un empuje también del doble que el original, o sea 20 N.
2. Mientras el libro sube por inercia en la rampa, la fricción, que siempre se opone al *movimiento*, se dirige hacia abajo de la rampa (el diagrama correspondiente de "cuerpo libre" tendría la componente del peso mg sen θ y la fricción $\mathbf{f}_k$, señalando ambas

AYUDA MATEMÁTICA **ELIPSES**

Una elipse se define geométricamente por la condición de que la suma de la distancia desde un foco de la elipse y la distancia desde el otro foco es la misma para todos los puntos de la elipse. Esta condición geométrica conduce a un sencillo método para la construcción de una elipse: clave tachuelas en los dos focos y ate un trozo de cordón a estos puntos. Estire la cuerda tensa mediante la punta de un lápiz y mueva este lápiz alrededor de los focos manteniendo tenso el cordón (véase la figura 1*a*).

También puede construirse una elipse rebanando oblicuamente un cono (véase la figura 1*b*). Debido a esto, se dice que una elipse es una sección cónica.

El diámetro mayor de la elipse se llama eje mayor y el menor se llama eje menor. El semieje mayor y el semieje menor son la mitad de estos diámetros, respectivamente (véase la figura 1*c*).

Si el semieje mayor de longitud a está a lo largo del eje x y el semieje menor de longitud b está a lo largo del eje y, entonces las coordenadas x y y de una elipse con centro en el origen satisfacen

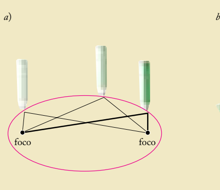
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los focos están sobre el eje mayor, a una distancia f del origen dado por

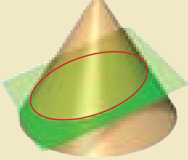
$$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

La separación entre un planeta y el Sol es $a - f$ en el perihelio y es $a + f$ en el afelio.

a)



b)



c)

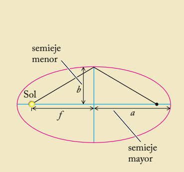


FIGURA 1 *a)* Construcción de una elipse. *b)* La elipse como sección cónica. *c)* Distancia focal f, semieje mayor a y semieje menor b de una elipse.

La figura 9.10 ilustra esta ley. Las dos áreas coloreadas son iguales y el planeta tarda tiempos iguales para moverse de P a P' y de Q a Q'. De acuerdo con la figura 9.10, la rapidez del planeta es mayor cuando está cerca del Sol (en Q) que cuando está lejos de él (en P).

La segunda ley de Kepler, también llamada ley de las áreas, es una consecuencia directa de la dirección central de la fuerza gravitacional. Puede probarse esta ley mediante un sencillo argumento geométrico. Considere tres posiciones sucesivas P, P', P'', separadas por una distancia relativamente pequeña. Suponga que los intervalos de tiempo entre P, P' y entre $P'P''$ son iguales, por ejemplo, que cada uno de los dos intervalos es un segundo. La figura 9.11 muestra las posiciones P, P', P''. Entre estas posiciones, puede aproximarse la órbita curva mediante los segmentos de línea recta PP' y $P'P''$. Como los intervalos de tiempo son de una unidad de tiempo (1 segundo), las longitudes de los segmentos PP' y $P'P''$ son proporcionales a las velocidades promedio

Q
Q'
S
La línea
iguales e

FIGURA 9.10 tiempo, las áreas
La distancia QQ
PP'.

Los recuadros de **Ayuda matemática** ofrecen guía matemática específica en una ubicación inicial en el texto, donde esa técnica es más pertinente.

- En este caso, en el capítulo 9, las elipses son importantes para estudiar las órbitas.
- Hay disponible ayuda matemática adicional en los apéndices 2, 3, 4 y 5, al final del libro.

En todo el texto, los recuadros de **La física en la práctica** ofrecen detalles específicos en una aplicación en el mundo real del concepto que se estudia; en este caso, fuerzas que operan en los choques de automóviles en el capítulo 11, perteneciente al volumen 1.

LA FÍSICA EN LA PRÁCTICA **CHOQUES AUTOMOVILÍSTICOS**

Conceptos en contexto

Los efectos del impacto secundario sobre el cuerpo humano pueden apreciarse por completo si se comparan las rapideces de impacto de un cuerpo sobre el tablero o el parabrisas con la rapidez alcanzada por un cuerpo en caída libre desde cierta altura. El impacto de la cabeza sobre el parabrisas a 15 m/s es equivalente a caer cuatro pisos desde un edificio y aterrizar con la cabeza sobre una superficie dura. La intuición dice que es probable que esto sea mortal. Dado que la intuición acerca de los peligros de las alturas es mucho mejor que la referente a los peligros de la rapidez, con frecuencia es descriptivo comparar las rapideces de impacto con alturas de caída equivalentes. La tabla cita rapideces de impacto y alturas equivalentes, expresadas como el número de pisos que el cuerpo tiene que caer para adquirir la misma rapidez.

El número de muertes en choques automovilísticos se redujo por el uso de bolsas de aire, las cuales ayudan a amortiguar el impacto durante un tiempo más largo, lo que reduce la fuerza promedio en el tiempo. Para ser efectiva, la bolsa de aire debe inflarse con rapidez, antes de que el pasajero llegue a ella, por lo general en aproximadamente 10 milisegundos. Debido a esto, un pasajero, en especial un niño muy cerca de una bolsa de aire antes de que se infle puede lesionarse o morir por el impulso del inflado. Pero, para un pasajero adulto sentado de manera adecuada, la bolsa de aire inflada amortigua al pasajero, lo que reduce la severidad de las lesiones.

COMPARACIÓN DE RAPIDECES DE IMPACTO Y ALTURAS DE CAÍDA

RAPIDEZ	RAPIDEZ	ALTURA EQUIVALENTE (NÚMERO DE PISOS)[a]
15 km/h	9 mi/h	$\frac{1}{3}$
30	19	1
45	28	3
60	37	5
75	47	8
90	56	11
105	65	15

[a] Cada piso mide 2.9 m.

Sin embargo, el impacto todavía puede ser mortal: usted no esperaría sobrevivir a un salto desde un edificio de 11 pisos sobre un colchón de aire.

Para máxima protección, siempre debe usarse un cinturón de seguridad, incluso si el vehículo está equipado con bolsas de aire. En choques laterales, en choques repetidos (como en las colisiones múltiples) y en las volcaduras, una bolsa de aire es de poca ayuda y un cinturón de seguridad es esencial. La efectividad de los cinturones de seguridad está bien demostrada por las experiencias de los conductores de autos de carreras, quienes usan cinturones de regazo y cinturones que cruzan los hombros. Incluso en choques espectaculares a muy altas rapideces (véase la figura), los conductores rara vez sufren lesiones severas.





En una carrera en un circuito de California, en octubre de 2000, un carro se voltea y se parte a la mitad después de un choque, pero el conductor, Luis Díaz, se aleja de los restos de su auto.

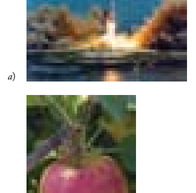
SOLUCIÓN: La única fuerza horizontal sobre la bola es la fuerza normal ejercida por la pared; esta fuerza invierte el movimiento de la bola (véase la figura 11.3). Dado que la pared es muy sólida, la fuerza de reacción de la bola sobre la pared no dará a ésta alguna velocidad apreciable. Por tanto, la energía cinética de este sistema,

El texto ofrece frecuentemente **tablas de valores típicos** de cantidades físicas.

- Tales tablas generalmente están etiquetadas "**Algunos (algunas)...**", como en este caso del capítulo 5 de este libro.
- Estas tablas dan alguna impresión de las magnitudes que ocurren en el mundo real.

TABLA 5.1 **ALGUNAS FUERZAS**

Atracción gravitacional del Sol sobre la Tierra	3.5×10^{22} N
Empuje de los motores de propulsión del Saturno V *a)*	3.3×10^{7} N
Tracción de una lancha remolcadora grande	1×10^{6} N
Empuje de motores de propulsión (Boeing 747)	7.7×10^{5} N
Tracción de una locomotora grande	5×10^{5} N
Fuerza de desaceleración de un automóvil durante el frenado	1×10^{4} N
Fuerza entre dos protones en un núcleo	$\approx 10^{4}$ N
Fuerza de aceleración en un automóvil	7×10^{3} N
Atracción gravitacional de la Tierra sobre un hombre	7.3×10^{2} N
Máxima fuerza ascendente ejercida por el antebrazo (isométrica)	2.7×10^{2} N
Atracción gravitacional de la Tierra sobre una manzana *b)*	2 N
Atracción gravitacional de la Tierra sobre una moneda de 5 centavos de dólar estadounidense	5.1×10^{-2} N
Fuerza entre el electrón y el núcleo de un átomo (hidrógeno)	8×10^{-8} N
Fuerza sobre la punta de un microscopio de fuerza atómica	10^{-12} N
La fuerza más pequeña detectada (oscilador mecánico)	10^{-19} N



a)

b)

Cada capítulo se cierra con un resumen, seguido por preguntas para discusión, problemas, problemas de repaso y respuestas a las revisiones.

RESUMEN

LA FÍSICA EN LA PRÁCTICA Ultracentrífugas (página 188)

TÉCNICAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (página 190)
Fuerzas de fricción y fuerzas centrípetas

FUERZA DE FRICCIÓN CINÉTICA (Dirección *opuesta* al movimiento) $f_k = \mu_k N$ (6.1)

FUERZA DE FRICCIÓN ESTÁTICA (La dirección es opuesta a la fuerza que trata de mover al cuerpo; su magnitud varía en respuesta a la fuerza aplicada.) $f_{s,máx} = \mu_s N$ (6.5)

FUERZA DE RESTAURACIÓN DE UN RESORTE (LEY DE HOOKE) (La dirección es hacia la posición relajada; x se mide desde la posición relajada.) $F = -kx$ (6.11)

estirado
La dirección de la fuerza de restauración siempre es opuesta a la deformación.

FUERZA DEBIDA A LA RESISTENCIA DEL AIRE A rapidez alta v, donde C es una constante aerodinámica adimensional, ρ es la densidad del aire y A es el área de la sección transversal. $f_{aire} = \frac{1}{2}C\rho Av^2$

FUERZA NECESARIA PARA MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (El sentido es centrípeto.) $F = \frac{mv^2}{r}$ (6.13)

LAS CUATRO FUERZAS FUNDAMENTALES
Gravitacional, "débil", electromagnética y "fuerte".

En el **Resumen** aparecen en una lista los temas y las referencias de página para cualquier contenido especial dentro de este capítulo, tales como recuadros de ayuda matemática, técnicas para resolución de problemas o la física en la práctica.

- En seguida, el resumen lista los conceptos centrales del capítulo en el orden en que se tratan. El concepto aparece a la izquierda en negritas.
- La expresión matemática del concepto aparece en la columna media, con un número de ecuación en el extremo derecho.

- Alrededor de 15 o más **Preguntas para discusión** siguen al resumen de cada capítulo.
- Estas preguntas necesitan razonamiento, pero no cálculos; por ejemplo, "¿Por qué son resbalosas las calles mojadas?"
- Algunas de estas preguntas pretenden ser rompecabezas que no tienen una respuesta única, pero conducen a discusiones provocadas.

PREGUNTAS PARA DISCUSIÓN

1. Según los creyentes en la parapsicología, algunas personas están dotadas del poder supernormal de la psicocinesia; por ejemplo, doblar cucharas a distancia por medio de misteriosas fuerzas psíquicas que emanan de su cerebro. Los físicos están seguros de que las únicas fuerzas que actúan entre piezas de materia son las que se enlistan en la sección 6.4, ninguna de las cuales está comprendida en la psicocinesia. Dado que el cerebro no es más que una muy complicada pieza de materia, ¿qué conclusiones puede sacar un físico acerca de la psicocinesia?
2. Si usted lleva una báscula de resortes de Londres a Hong Kong, ¿tiene que recalibrarla? ¿Y tiene que hacerlo si lleva una balanza de barra?
3. Cuando usted estira horizontalmente una cuerda entre dos puntos fijos, siempre se pandea un poco, a pesar de lo grande que sea la tensión. ¿Por qué?
4. ¿Cuáles son las fuerzas en un ave que se eleva? ¿Cómo puede el ave ganar altitud sin aletear?
5. ¿Cómo puede usted usar un péndulo suspendido del techo de su automóvil para medir su aceleración?
6. Cuando un avión vuela en una trayectoria parabólica similar a la de un proyectil, los pasajeros experimentan una sensación de ingravidez. ¿Cómo tendría que volar el avión para dar a los pasajeros una sensación de aumento de peso?
7. Una cadena sin fricción cuelga sobre dos planos inclinados adyacentes (véase la figura 6.24*a*). Pruebe que la cadena está en equilibrio; es decir, que la cadena no se deslizará ni a la izquierda ni a la derecha. [Sugerencia: Un método de prueba, inventado por el ingeniero y matemático del siglo XVII Simon Stevin, pide imaginar que se cuelga un trozo extra de cadena de los extremos de la cadena original (véase la figura 6.24*b*). Esto hace posible concluir que la cadena original no puede deslizarse.]

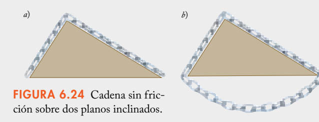


FIGURA 6.24 Cadena sin fricción sobre dos planos inclinados.

8. Visto desde un marco de referencia que se mueve con la ola, el movimiento de un surfista es análogo al de un esquiador que desciende de una montaña.* Si la ola durase para siempre, ¿podría el surfista esquiar en ella para siempre? Para permanecer sobre la ola tanto tiempo como sea posible, ¿en qué dirección debe el surfista esquiar la ola?
9. El pulido excesivo de las superficies de un bloque de metal aumenta su fricción. Explique.

* Sin embargo, hay una complicación: las olas se hacen más altas al acercarse a la playa. Ignore esta complicación.

10. A algunos conductores les gusta girar las ruedas de sus automóviles para un arranque rápido. ¿Les da esto mayor aceleración? (Sugerencia: $\mu_s > \mu_k$.)
11. A los esquiadores a campo traviesa les gusta usar una cera para dar a sus esquíes mayor coeficiente de fricción estática, pero bajo coeficiente de fricción cinética. ¿Por qué es esto útil? ¿Cómo obtienen el mismo efecto los esquíes "sin cera"?
12. Los diseñadores de locomotoras usualmente consideran que la máxima fuerza disponible para mover el tren ("fuerza de arrastre") es una cuarta o quinta parte del peso que se apoya en las ruedas motrices de la locomotora. ¿Qué valor del coeficiente de fricción entre las ruedas y la vía supone esto implícitamente?
13. Cuando un automóvil con tracción en las ruedas traseras acelera desde el reposo, la aceleración máxima que puede obtener es menor que la desaceleración máxima que puede obtener al frenar. ¿Por qué? (Sugerencia: ¿Cuáles ruedas del automóvil participan en la aceleración y cuáles en el frenado?)
14. ¿Puede usted pensar en algunos materiales con $\mu_k > 1$?
15. Para una rapidez inicial dada, la distancia de detención de un tren es mucho mayor que la de un camión. ¿Por qué?
16. ¿Por qué la tracción en nieve o hielo de un automóvil con tracción trasera mejora cuando usted pone peso extra sobre las ruedas traseras?
17. ¿Por qué las calles mojadas son resbalosas?
18. Con objeto de detener un automóvil en una calle resbalosa en la distancia más corta, es mejor frenar tan fuerte como sea posible sin iniciar un derrape. ¿Por qué el derrape aumenta la distancia de detención? (Sugerencia: $\mu_s > \mu_k$.)
19. Suponga que en una parada de pánico un conductor traba las ruedas de su automóvil y deja marcas de derrape sobre el pavimento. ¿Cómo puede usted deducir su velocidad inicial a partir de la longitud de las marcas de derrape?
20. Los conductores de autos bólido en carreras de arrancadas encuentran ventajoso hacer girar sus ruedas muy rápido en el inicio para quemar y fundir el caucho de sus neumáticos (véase la figura 6.25). ¿Cómo les ayuda esto a obtener una mayor aceleración que la que se esperaría por el coeficiente de fricción estática?

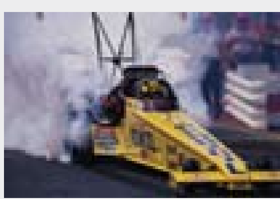


FIGURA 6.25 Corredor de arrancadas en el inicio de la carrera.

Después de las preguntas para discusión siguen alrededor de 70 **Problemas** y 15 **Problemas de repaso.**

- El planteamiento del problema contiene los datos y las condiciones sobre las cuales girará una solución.
- Los problemas se agrupan por sección de capítulo y avanzan de sencillos a más complejos dentro de cada sección.
- Muchos problemas emplean datos del mundo real y ocasionalmente pueden introducir aplicaciones más allá de las que se trataron en el capítulo.

194 CAPÍTULO 6 Más aplicaciones de las leyes de Newton

21. Una curva de una carretera consiste en un cuarto de circunferencia que conecta dos segmentos rectos. Si esta curva tiene un peralte perfecto para el movimiento a una velocidad dada, ¿puede unirse a los segmentos rectos sin que haya un reborde? ¿Cómo podría usted diseñar una curva que esté perfectamente peraltada en toda su longitud y se una en forma suave con los segmentos rectos sin ningún reborde?
22. Los automóviles con motores traseros (como el viejo "escarabajo" VW) tienden a "colear"; es decir, en una curva la parte trasera tiende a virar hacia el exterior de la curva, lo cual hace girar al auto excesivamente hacia adentro de la curva. Explique.
23. Al dar vuelta por una curva en su automóvil, usted tiene la impresión de que una fuerza trata de tirar de usted hacia afuera de la curva. ¿Existe dicha fuerza?
24. Si la Tierra dejara de girar (y lo demás quedara igual), el valor de g en todos los puntos de la superficie salvo los polos sería ligeramente mayor. ¿Por qué?
25. *a*) Si un piloto en un avión rápido saliera repentinamente de una caída en picada (véase la figura 6.26*a*), sufriría un desmayo ocasionado por la pérdida de presión sanguínea en el cerebro. Si de manera repentina inicia una caída en picada mientras está ascendiendo (véase la figura 6.26*b*), sufrirá un "redout" (condición en que el repentino flujo de sangre al cerebro ocasiona un enrojecimiento del campo visual y dolor de cabeza) causado por la excesiva presión sanguínea en el cerebro. Explique.
    b) Un piloto que usa un traje G (una prenda muy ceñida que comprime los tejidos de las piernas y el abdomen) puede tolerar $8g$ al salir de una picada (véase la figura 6.26*c*). ¿Cómo evita el desmayo este traje G? Un piloto no puede tolerar más de $-2g$ al iniciar una picada. ¿Por qué el traje G no ayuda contra el redout?

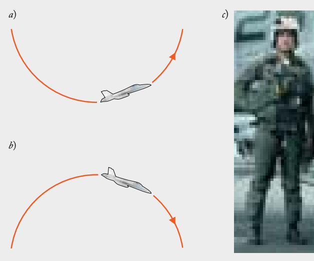


FIGURA 6.26 *a*) Avión que sale de una picada. *b*) Avión que inicia una picada. *c*) Piloto con un traje G.

26. Al tomar una curva a velocidad alta, un motociclista inclina la motocicleta hacia el centro de la curva. ¿Por qué?

PROBLEMAS

6.1 Fricción

1. Los antiguos egipcios movían grandes piedras arrastrándolas por la arena en trineos. ¿Cuántos egipcios se necesitaban para arrastrar un obelisco de 700 toneladas métricas? Suponga que $\mu_k = 0.30$ para el trineo sobre arena y que cada egipcio ejercía una fuerza horizontal de 360 N.
2. La base de una grúa está atornillada con cuatro pernos a una placa de montaje. La base y la placa de montaje son superficies planas de acero. El coeficiente de fricción de estas superficies en contacto es $\mu_s = 0.40$. Los pernos producen una fuerza normal de 2 700 N cada uno. ¿Qué fuerza máxima de fricción estática actuará entre las superficies de acero y ayudará a oponerse al deslizamiento lateral de la grúa sobre su base?
3. De acuerdo con la prueba realizada por el fabricante, un automóvil con una rapidez inicial de 65 km/h tiene una distancia de detención de 20 m en un camino nivelado. Suponiendo que no hay derrape durante el frenado, ¿cuál es el valor de μ_s entre las ruedas y cuál es el camino que se requiere para obtener esta distancia de detención?
4. Un cajón descansa en la plataforma de carga de un camión. El coeficiente de fricción entre el cajón y la plataforma es $\mu_s = 0.40$. Si el camión se detiene rápidamente, el cajón se deslizará hacia adelante y se estrellará con la cabina del camión. ¿Cuál es la desaceleración máxima de frenado que puede tener el camión para que el cajón permanezca quieto?
5. Al frenar (sin derrapar) en un camino seco, la distancia de detención de un auto deportivo con una rapidez inicial alta es de 38 m. ¿Cuál habría sido la distancia de detención del mismo auto con la misma rapidez inicial en un camino con hielo? Suponga que $\mu_s = 0.85$ para el camino seco y $\mu_s = 0.20$ para el camino con hielo.
6. En un notable accidente en la carretera M1 (en Inglaterra), un automóvil Jaguar que inicialmente corría "a más de 100 mph" recorrió 290 m antes de detenerse. Suponiendo que las ruedas estaban trabadas por completo durante el recorrido y que el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el camino era de 0.80, encuentre la rapidez inicial.

Los **Problemas de repaso** están específicamente diseñados para ayudar a los estudiantes a prepararse para exámenes.

- Los problemas de repaso con frecuencia prueban la comprensión de conceptos de más de una sección dentro del capítulo.
- Los problemas de repaso usan con frecuencia un enfoque guiado planteando series de preguntas que se derivan una de otra.

Problemas de repaso

PROBLEMAS DE REPASO

76. En el despegue, el cohete Saturno V usado para las misiones Apolo tiene una masa de 2.45×10^6 kg.
    a) ¿Cuál es el empuje mínimo que deben alcanzar los motores de cohete para realizar el despegue?
    b) El empuje real que desarrollan los motores es 3.3×10^7 N. ¿Cuál es la aceleración vertical del cohete en el despegue?
    c) En el agotamiento, el cohete ha gastado su combustible y su masa remanente es de 0.75×10^6 kg. ¿Cuál es la aceleración inmediatamente antes del agotamiento? Suponga que el movimiento todavía es vertical y que la fuerza de gravedad es la misma que cuando el cohete está en la Tierra.
77. Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos de un automóvil y el camino es $\mu_s = 0.80$, ¿cuál es la distancia mínima que necesita el automóvil para detenerse sin derrapar desde una rapidez inicial de 90 km/h? ¿Cuánto tarda en detenerse?
78. Suponga que el último vagón de un tren se desengancha mientras el tren se mueve hacia adelante en una pendiente de 1:6 a una rapidez de 48 km/h.
    a) ¿Cuál es la desaceleración del vagón? Ignore la fricción.
    b) ¿Cuán lejos viaja por inercia el vagón subiendo la pendiente antes de detenerse?
79. Un cajón de 40 kg cae de un camión que viaja a 80 km/h en un camino nivelado. El cajón se desliza por el camino y gradualmente se detiene. El coeficiente de fricción cinética entre el cajón y el camino es de 0.80.
    a) Dibuje un diagrama de "cuerpo libre" para el cajón deslizándose en el camino.
    b) ¿Cuál es la fuerza normal que ejerce el camino sobre el cajón?
    c) ¿Cuál es la fuerza de fricción que ejerce el camino sobre el cajón?
    d) ¿Cuál es la fuerza del peso sobre el cajón? ¿Cuál es la fuerza neta sobre el cajón?
    e) ¿Cuál es la desaceleración del cajón? ¿Cuán lejos se desliza el cajón antes de detenerse?
80. Una caja de 2.0 kg descansa en un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y el plano es de 0.90.
    a) Dibuje un diagrama de "cuerpo libre" para la caja.
    b) ¿Cuál es la fuerza normal que el plano inclinado ejerce sobre la caja?
    c) ¿Cuál es la fuerza de fricción que el plano inclinado ejerce sobre la caja?
    d) ¿Cuál es la fuerza neta que el plano inclinado ejerce sobre la caja? ¿Cuál es la dirección de esta fuerza?
81. El cuerpo de un automóvil se mantiene sobre los ejes de las ruedas mediante cuatro resortes, uno cerca de cada rueda. Suponga que los resortes son verticale[s] todos los resortes son iguales. La mas[a] es de 1 200 kg y la constante de resor[te] 10^4 N/m. Cuando el automóvil está e[n] nivelado, ¿cuánto se comprimen los r[esortes] relajada?

*82. Un bloque de madera descansa en una hoja de papel que está sobre una mesa. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el papel es $\mu_s = 0.70$ y entre el papel y la mesa es $\mu_s = 0.50$. Si usted inclina la mesa, ¿a qué ángulo comenzará a moverse el bloque?

*83. Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados por un cordón. Un bloque se desliza sobre una mesa y el otro cuelga del cordón, que pasa sobre una polea (véase la figura 6.46). El coeficiente de fricción de deslizamiento entre el primer bloque y la mesa es $\mu_k = 0.20$. ¿Cuál es la aceleración de los bloques?

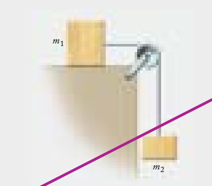


FIGURA 6.46 Masa sobre mesa, polea y masa colgante.

*84. Un hombre con masa de 75 kg empuja una caja pesada sobre un piso plano. El coeficiente de fricción deslizante entre el piso y la caja es de 0.20 y el coeficiente de fricción estática entre los zapatos del hombre y el piso es de 0.80. Si el hombre empuja horizontalmente (véase la figura 6.47), ¿cuál es la masa máxima de la caja que puede mover?

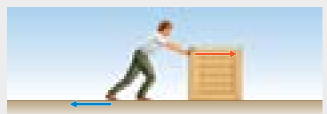


FIGURA 6.47 Un hombre empuja una caja.

*85. Dos resortes de constantes 2.0×10^3 N/m y 3.0×10^3 N/m están conectados uno tras otro y una masa de 5.0 kg cuelga

Los problemas y los problemas de repaso están marcados por **nivel de dificultad**:

- Los que no tienen asterisco son los más comunes y necesitan muy poca manipulación de las ecuaciones existentes; o pueden solamente requerir volver a estudiar los pasos de un ejemplo trabajado.
- Los problemas marcados con un asterisco (*) son de dificultad intermedia y pueden requerir el uso de diversos conceptos y la manipulación de más de una ecuación para despejar y resolver la incógnita.
- Los problemas marcados con dos asteriscos (**) presentan un reto, exigen considerable razonamiento, pueden exigir bastante habilidad matemática y son los menos comunes.